Лекція № 8

Продовжуємо вивчати релятивістську динаміку. Для вільної релятивістської частинки побудували функцію Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

За допомогою відомих формул механіки визначили релятивістський імпульс та енергію

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad \varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Визначили 4-імпульс

$$p^i = mcu^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right); \quad p_i = mcu_i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, -\vec{p}\right); \quad p^i p_i = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2;$$

та функцію Гамільтона

$$H = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}.$$

Закон зміни тривимірного імпульсу та енергії легко знайти, скориставшись тим, що ці величини є компонентами вектору 4-імпульсу.

Закон перетворення компонент 4-імпульсу при перетвореннях Лоренца знайдемо за загальним правилом перетворення контраваріантних компонент 4-вектору (1.90)

$$p^0 = \frac{p^{0\prime} + \frac{V}{c}p^{1\prime}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad p^1 = \frac{\frac{V}{c}p^{0\prime} + p^{1\prime}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad p^2 = p^{2\prime}; \quad p^3 = p^{3\prime};$$

$$\frac{\varepsilon}{c} = \frac{\frac{\varepsilon'}{c} + \frac{V}{c}p'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad p_x = \frac{\frac{V}{c}\frac{\varepsilon'}{c} + p'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad p_y = p'_y; \quad p_z = p'_z.$$

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V\varepsilon'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad p_y = p'_y; \quad p_z = p'_z; \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon' + Vp'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{3.18}$$

Формули (3.18) дають закон перетворення просторових компонент 4-імпульсу, які складають тривимірний вектор $\vec{p}$ та закон перетворення енергії ε.

Функцію дії релятивістської вільної частинки (3.9) можна записати у чотиривимірних позначеннях. Скористаємося тим, що $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$ та розглянемо варіацію $\delta S = -mc\delta \int ds$:

$$\delta(ds) = \delta\sqrt{dx_i dx^i} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{dx_i dx^i}}\delta\left(dx_i dx^i\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{dx_i dx^i}}\left(\delta(dx_i)dx^i + dx_i\delta(dx^i)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{dx_i dx^i}}\left(d(\delta x_i)dx^i + dx_i d(\delta x^i)\right) = \frac{1}{\sqrt{dx_i dx^i}}dx_i d(\delta x^i) =$$

$$= \frac{dx_i}{ds}d(\delta x^i) = u_i d(\delta x^i);$$

$$\delta S = -mc\int_{(1)}^{(2)} u_i d(\delta x^i) = -mc\left(u_i \delta x^i \Big|_{(1)}^{(2)} - \int_{(1)}^{(2)} \frac{du_i}{ds}(\delta x^i)ds \right);$$

Рівняння руху отримаємо, якщо зафіксуємо точки (1) та (2) $\delta x^i(2) = \delta x^i(1) = 0$

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{d}{ds}(mcu_i) = \frac{d}{ds}(p_i) = 0; \quad p_i = const.$$

4-імпульс через функцію дії

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}.$$

$$S = -\int p_i dx^i.$$

Енергія та імпульс замкненої системи частинок зберігаються. Ці закони збереження є наслідками незалежності ходу часу (однорідності часу) та однорідності простору для законів збереження енергії та імпульсу відповідно.

Ці властивості симетрії 4-простору для замкненої системи, очевидно, зберігаються в релятивістській механіці, тож для замкненої системи є закон збереження 4-імпульсу.

3.3. Зіткнення частинок в релятивістській механіці

Корисну інформацію про розпади та зіткнення релятивістських частинок можна отримати на основі законів збереження без розгляду конкретних типів взаємодії між частинками.

Спочатку частинки знаходяться на далеких відстанях та не взаємодіють. Далі відбувається зіткнення (пружне або непружне) після чого частинки знов розлітаються на значні відстані та не взаємодіють.

Пружне зіткнення – це зіткнення без зміни внутрішнього стану частинок.

Непружне зіткнення (розпад або утворення нових частинок) передбачає зміну внутрішнього стану частинок.

В усіх випадках система частинок як до, так і після зіткнення вважається замкненою (ізольованою), тому для неї виконуються закони збереження імпульсу та повної енергії.

В 4-просторі введений 4-імпульс

$$p^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right),$$

тому можна говорити про закон збереження 4-імпульсу для замкненої системи, як наслідок однорідності 4-простору для замкненої системи.

Закон збереження 4-імпульсу

$$p^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right) = const \qquad (3.19)$$

та інваріантність квадрату 4-імпульсу

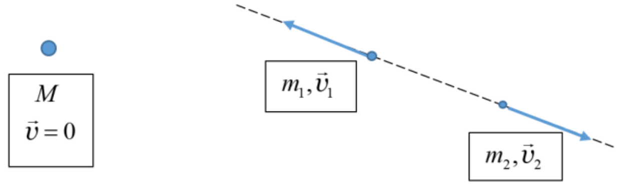
$$p^i p_i = m^2 c^2 - inv. \qquad (3.20)$$

зручно використовувати для вивчення зіткнень релятивістських частинок.

Розглянемо декілька прикладів. Почнемо з непружних зіткнень.

3.3.1. Розпад частинки

Нехай існувала нерухома $(\vec{\upsilon} = 0)$ в даній ІСВ частинка маси M, яка спонтанно розпалася на дві частинки



4-імпульс частинки до розпаду

$$p^i = (Mc, 0)$$

4-імпульси двох частинок, які утворилися

$$p_1^i = \left(\frac{\varepsilon_1}{c}, \vec{p}_1\right); \quad p_2^i = \left(\frac{\varepsilon_2}{c}, \vec{p}_2\right);$$

Закон збереження 4-імпульсу

$$p^i = p_1^i + p_2^i. \tag{3.21}$$

Окрім того,

$$p^i p_i = M^2c^2; \quad p_1^i p_{1i} = m_1^2c^2; \quad p_2^i p_{2i} = m_2^2c^2. \tag{3.22}$$

Припустимо, що ми знаємо маси m_1, m_2 частинок, які утворилися. Розрахуємо енергії частинок 1 та 2. Скористаємося формулами (3.21) й (3.22). Перепишемо (3.21) спочатку так

$$p_2^i = p^i - p_1^i$$

та утворимо скалярний добуток

$$p_2^i p_{2i} = (p^i - p_1^i)(p_i - p_{1i}).$$

Маємо

$$p_2^i p_{2i} = p^i p_i + p_1^i p_{1i} - p^i p_{1i} - p_1^i p_i = p^i p_i + p_1^i p_{1i} - 2p^i p_{1i};$$

$$m_2^2c^2 = M^2c^2 + m_1^2c^2 - 2\left(Mc\frac{\varepsilon_1}{c}\right);$$

$$m_2^2c^2 = M^2c^2 + m_1^2c^2 - 2\varepsilon_1 M;$$

Енергія частинки 1

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2M}\left(M^2 + m_1^2 - m_2^2\right)c^2. \tag{3.23}$$

Аналогічно знаходимо енергію частинки 2:

$$p_1^i = p^i - p_2^i; \quad p_1^i p_{1i} = (p^i - p_2^i)(p_i - p_{2i});$$

$$m_1^2c^2 = M^2c^2 + m_2^2c^2 - 2M\varepsilon_2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2M}\left(M^2 + m_2^2 - m_1^2\right)c^2. \tag{3.24}$$

Зберігається саме повна енергія, а не кінетична:

$$Mc^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{3.25}$$

Ще раз підкреслимо, що закон збереження енергії – це закон збереження часової компоненти 4-імпульсу замкненої системи.

В релятивістській механіці немає закону збереження маси. Сума мас частинок, які утворилися менше, ніж маса початкової частинки, як видно з формули (3.25)

$$Mc^2 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_2^2}{c^2}}}; \quad M = \underbrace{\frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_1^2}{c^2}}}}_{>m_1} + \underbrace{\frac{m_2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_2^2}{c^2}}}}_{>m_2};$$

$$M > m_1 + m_2.$$

Частинка може спонтанно розпастися тільки в тому випадку, якщо її маса більша, ніж сума мас частинок, які отворилися. Різницю ΔM

$$\Delta M = M - \sum_a m_a \tag{3.26}$$

називають дефектом маси. Величину

$$\Delta\varepsilon = \Delta M c^2 \tag{3.27}$$

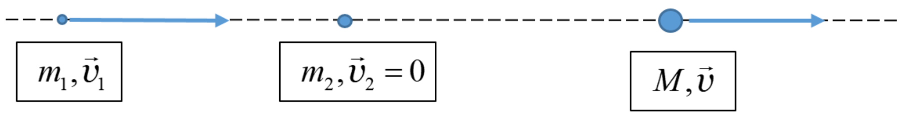
називають енергією зв'язку.

В релятивістській механіці є тільки закон збереження енергії, в яку включено енергію спокою.

Частинка може спонтанно розпастися тільки, якщо дефект маси $\Delta M > 0$. Якщо $\Delta M < 0$, то частинка стійка, тому для того, щоб вона розпалася, потрібно зовні додати енергію не меншу, ніж $|\Delta M| c^2$.

3.3.2. Утворення частинки

Частинка маси m_1 зі швидкістю $\vec{\upsilon}_1$ налітає на нерухому частинку маси m_2. В результаті непружного зіткнення утворюється нова частинка.



Знайдемо її масу M та швидкість $\vec{\upsilon}$. 4-імпульси частинок до зіткнення

$$p_1^i = \left(\frac{\varepsilon_1}{c}, \vec{p}_1\right); \quad p_2^i = (m_2 c, 0).$$

4-імпульс частинки, яка утворилася

$$p^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p} \right).$$

Закон збереження 4-імпульсу

$$p_1^i + p_2^i = p^i.$$

Маси частинки, яка утворилася знаходимо так

$$(p_1^i + p_2^i)(p_{1i} + p_{2i}) = p^i p_i;$$
$$p_1^i p_{1i} + p_2^i p_{2i} + 2 p_1^i p_{2i} = p^i p_i;$$
$$M^2 c^2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2\varepsilon_1 m_2;$$

Скористаємось тим, що нам відома енергія частинки 1

$$\varepsilon_1 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_1^2}{c^2}}}.$$

Маса частинки, що утворилася

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2 m_1 m_2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_1^2}{c^2}}}. \qquad (3.28)$$

З формули (3.28) видно, що $M^2 > (m_1 + m_2)^2$, тобто знов $M > m_1 + m_2$. Енергію зв'язку треба витратити на утворення частинки. Тривимірний імпульс $\vec{p}$ частинки, яка утворилася дорівнює тривимірному імпульсу частинки 1, що налітала на нерухому частинку 2:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 = \frac{m_1 \vec{\upsilon}_1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_1^2}{c^2}}}.$$

Енергія утвореної частинки

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + m_2 c^2.$$

Врахуємо зв'язок між імпульсом, швидкістю та енергією (див. ф-ли (3.13))

$$\vec{\upsilon}=\frac{c^2\vec{p}}{\varepsilon}=\frac{c^2\vec{p}_1}{\varepsilon_1+m_2c^2}=\frac{c^2 m_1\vec{\upsilon}_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_1^2}{c^2}}\left(\frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_1^2}{c^2}}}+m_2c^2\right)};$$

та отримаємо швидкість руху частинки, що утворилася.

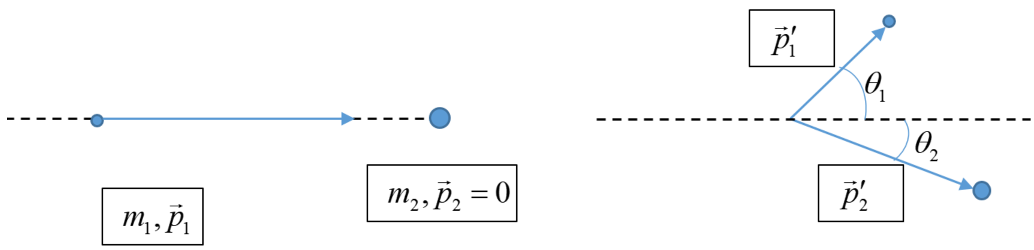
$$\vec{\upsilon}=\frac{m_1\vec{\upsilon}_1}{\left(m_1+m_2\sqrt{1-\frac{\upsilon_1^2}{c^2}}\right)}. \tag{3.29}$$

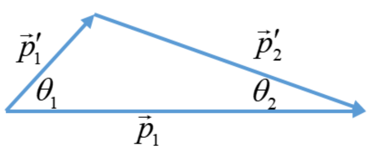
3.3.3. Пружне зіткнення двох частинок (розсіювання)

Розглянемо процес пружного розсіювання двох частинок спочатку в лабораторній системі відліку (л-система). Нехай частинка маси m_1 та імпульсом $\vec{p}_1$ налітає на нерухому частинку маси m_2, $\vec{p}_2=0$. Знаємо також енергії частинок до та після зіткнення, бо енергії визначаються через маси та імпульси:

$$\varepsilon_1=\sqrt{c^2p_1^2+m_1^2c^4};\quad \varepsilon_2=m_2c^2;\quad \varepsilon_1'=\sqrt{c^2p_1'^2+m_1^2c^4};\quad \varepsilon_2'=\sqrt{c^2p_2'^2+m_2^2c^4}.$$

При пружному зіткненні внутрішній стан частинок не змінюється, тобто маси всіх частинок до та після зіткнення залишаються тими ж самими.





Визначимо кути розльоту θ_1 та θ_2, якщо відомі імпульси частинок після зіткнення $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$.

4-імпульси частинок до зіткнення

$$p_1^i = \left(\frac{\varepsilon_1}{c}, \vec{p}_1\right); \quad p_2^i = \left(m_2 c, 0\right).$$

4-імпульси частинок після зіткнення

$$p_1^{i\prime} = \left(\frac{\varepsilon_1'}{c}, \vec{p}_1'\right); \quad p_2^{i\prime} = \left(\frac{\varepsilon_2'}{c}, \vec{p}_2'\right)$$

Закон збереження 4-імпульса

$$p_1^i + p_2^i = p_1^{i\prime} + p_2^{i\prime} \tag{3.30}$$

Перепишемо (3.30), щоб знайти кут θ_1, так

$$p_1^i + p_2^i - p_1^{i\prime} = p_2^{i\prime} \tag{3.31}$$

Побудуємо інваріант

$$(p_1^i + p_2^i - p_1^{i\prime})(p_{1i} + p_{2i} - p_{1i}') = p_2^{i\prime} p_{2i}'; \tag{3.32}$$

$$p_1^i p_{1i} + \cancel{p_2^i p_{2i}} + p_1^{i\prime} p_{1i}' + 2 p_1^i p_{2i} - 2 p_1^i p_{1i}' - 2 p_2^i p_{1i}' = \cancel{p_2^{i\prime} p_{2i}'};$$
$$2 p_1^i p_{1i} + 2 p_1^i p_{2i} - 2 p_1^i p_{1i}' - 2 p_2^i p_{1i}' = 0;$$

Врахували, що $p_1^i p_{1i} = p_1^{i\prime} p_{1i}' = m_1^2 c^2$, $p_2^i p_{2i} = p_2^{i\prime} p_{2i}' = m_2^2 c^2$, тому

$$m_1^2 c^2 + p_1^i p_{2i} - p_1^i p_{1i}' - p_2^i p_{1i}' = 0.$$

Обчислимо скалярні добутки $p_1^i p_{2i}, p_1^i p_{1i}', p_2^i p_{1i}'$

$$m_1^2 c^2 + \varepsilon_1 m_2 - \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_1'}{c^2} - \vec{p}_1 \vec{p}_1'\right) - \varepsilon_1' m_2 = 0;$$

$$m_1^2 c^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_1') m_2 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_1'}{c^2} + p_1 p_1' \cos\theta_1 = 0;$$

$$p_1 p_1' \cos\theta_1 = -m_1^2 c^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_1') m_2 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_1'}{c^2};$$

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{p_1 p_1'}\left[\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_1'}{c^2} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_1') m_2 - m_1^2 c^2\right];$$

Знайдено кут розльоту частинки m_1, яка налітала на нерухому частинку m_2

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{p_1 p_1'}\left[\varepsilon_1'\left(m_2 + \frac{\varepsilon_1}{c^2}\right) - m_1^2c^2 - \varepsilon_1 m_2\right]. \tag{3.33}$$

Кут розльоту нерухомої частинки m_2 після зіткнення з частинкою m_1 знаходимо аналогічно:

$$p_1^i + p_2^i - p_2^{i\prime} = p_1^{i\prime};$$

$$(p_1^i + p_2^i - p_2^{i\prime})(p_{1i} + p_{2i} - p_{2i}') = p_1^{i\prime} p_{1i}';$$

$$\cancel{p_1^i p_{1i}} + p_2^i p_{2i} + p_2^{i\prime} p_{2i}' + 2p_1^i p_{2i} - 2p_1^i p_{2i}' - 2p_2^i p_{2i}' = \cancel{p_1^{i\prime} p_{1i}'};$$

$$2p_2^i p_{2i} + 2p_1^i p_{2i} - 2p_2^i p_{2i}' - 2p_1^i p_{2i}' = 0;$$

$$m_2^2c^2 + \varepsilon_1 m_2 - \varepsilon_2' m_2 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2'}{c^2} + p_1 p_2' \cos\theta_2 = 0;$$

$$p_1 p_2' \cos\theta_2 = -m_2^2c^2 - \varepsilon_1 m_2 + \varepsilon_2' m_2 + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2'}{c^2};$$

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{p_1 p_2'}\left[\varepsilon_2'\left(m_2 + \frac{\varepsilon_1}{c^2}\right) - m_2c^2\left(m_2 + \frac{\varepsilon_1}{c^2}\right)\right];$$

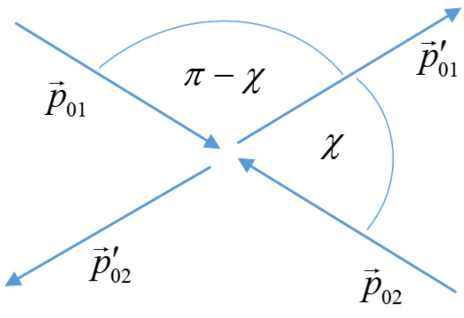
$$\cos\theta_2 = \frac{1}{p_1 p_2'}\left(m_2 + \frac{\varepsilon_1}{c^2}\right)\left(\varepsilon_2' - m_2c^2\right) = \frac{1}{p_1 p_2'}\left(m_2 + \frac{\varepsilon_1}{c^2}\right)\left(\frac{\varepsilon_2'}{c^2} - m_2\right)c^2;$$

Кут розльоту θ_2

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{p_1 p_2'}\left(m_2 + \frac{\varepsilon_1}{c^2}\right)\left(\frac{\varepsilon_2'}{c^2} - m_2\right)c^2. \tag{3.34}$$

Дослідимо тепер, яку частку енергії було передано частинкою, яка рухалась, нерухомій частинці.

Розглянемо це зіткнення в системі відліку центрі інерції (ц-система), в якій повний тривимірний імпульс замкненої системи до та після зіткненні дорівнює 0.



χ – кут повороту в ц-системі.

В ц-системі (див. рис. вище)

$$\vec{p}_{02} = -\vec{p}_{01}; \quad \vec{p}'_{02} = -\vec{p}'_{01},$$

тому енергії частинок в ц-системі при зіткненні не змінюються

$$\varepsilon_{01} = \varepsilon'_{01}; \quad \varepsilon_{02} = \varepsilon'_{02};$$

Напишемо 4-імпульси в ц-системі

$$p^i_{01} = \left(\frac{\varepsilon_{01}}{c}, \vec{p}_{01}\right); \quad p^i_{02} = \left(\frac{\varepsilon_{02}}{c}, -\vec{p}_{01}\right); \quad p^i_{01}{}' = \left(\frac{\varepsilon_{01}}{c}, \vec{p}'_{01}\right); \quad p^i_{02}{}' = \left(\frac{\varepsilon_{02}}{c}, -\vec{p}'_{01}\right).$$

Знов скористаємось законом збереження 4-імпульсу (3.30), знов перепишемо його у вигляді (3.31) та побудуємо інваріант (3.32)

$$(p^i_1 + p^i_2 - p^{i\prime}_1)(p_{1i} + p_{2i} - p'_{1i}) = p^{i\prime}_2 p'_{2i};$$
$$m_1^2 c^2 + p^i_1 p_{2i} - p^i_1 p'_{1i} - p^i_2 p'_{1i} = 0.$$

Скалярні добутки є інваріантами, тому

$$p^i_1 p_{2i} = p^i_{01} p_{02i}; \quad p^i_1 p'_{1i} = p^i_{01} p'_{01i}; \quad p^i_2 p'_{1i} = p^i_{02} p'_{01i}.$$

щоб ввести до розгляду кут повороту частинки 1 в ц-системі скалярний добуток 4-імпульсів 1-ї частинки до на після зіткнення обчислимо в ц-системі:

$$m_1^2 c^2 + \underset{л-сист.}{p^i_1 p_{2i}} - \underbrace{p^i_{01} p'_{01i}}_{ц-сист.} - \underset{л-сист.}{p^i_2 p'_{1i}} = 0;$$

$$m_1^2 c^2 + \varepsilon_1 m_2 - \varepsilon'_1 m_2 - \frac{\varepsilon_{01}^2}{c^2} + p_0^2 \cos\chi = 0;$$

$$|\vec{p}_{01}| = |\vec{p}'_{01}| = |\vec{p}_{02}| = |\vec{p}'_{02}| = p_0;$$

$$\underbrace{\frac{\varepsilon_{01}^2}{c^2} - m_1^2 c^2}_{p_0^2} - \varepsilon_1 m_2 + \varepsilon'_1 m_2 - p_0^2 \cos\chi = 0;$$

$$(\varepsilon'_1 - \varepsilon_1) m_2 + p_0^2 (1 - \cos\chi) = 0;$$

Енергія частинки 1 після зіткнення з частинкою 2

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 - \frac{p_0^2}{m_2}(1 - \cos\chi). \tag{3.35}$$

Енергія частинки 2 згідно з законом збереження енергії

$$\varepsilon'_2 = \varepsilon_2 + \frac{p_0^2}{m_2}(1 - \cos\chi). \tag{3.36}$$

Частка переданої енергії

$$\Delta\varepsilon = \frac{p_0^2}{m_2}(1-\cos\chi). \tag{3.37}$$